УДК 629.7.072.1

# ОТРАБОТКА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕНТИЛЯТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

***В.В. ДИКУСАР***
***доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник***
***Вычислительный центр им. А.А. Дородницына,***
***Российская академия наук, Москва, Россия***
***E-mail: dikussar@yandex.ru***

***Д.О. НУЖДИН***
***аспирант, руководитель отдела управления информационной***
***политикой, Московского физико-технический институт***
***(государственный университет), Москва, Россия***
***E-mail: nuzhdin@phystech.edu***

Исследуется осевое движение относительно центра масс полезной нагрузки на воздушном шаре под действием вентиляторных двигателей. Предложена реализация алгоритма управления. Изучена возможность использования вентиляторных двигателей для удержания на заданной траектории. Приведена методика определения параметров двигателей и расчет алгоритмов управления.

**Ключевые слова:** ориентация, вращение, управление, скорость, вертикаль.

Management problems

# DEVELOPMENT OF ALGORITHMS TO CONTROL THE ORIENTATION OF A RIGID BODY SUSPENDED FROM A STRING, USING THE FAN MOTORS

V.V. DIKUSAR
doctor of physico-mathematical Sciences, chief researcher of Computing center.
A. A. Dorodnicyn, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: dikussar@yandex.ru

D.O. NUZHDIN
postgraduate student, head of the Department of information policy of the Moscow
Institute of physics and technology (state University), Moscow, Russia
E-mail: nuzhdin@phystech.edu

Investigated axial movement relative to the center of mass of the payload on the balloon under the action of the fan motors. The proposed implementation of the control algorithm. Studied the possibility of using fan motors to keep the desired path. The technique of determining the parameters of engines and the calculation of control algorithms.

**Keywords:** orientation, rotation, control, speed, vertical.

**1. Постановка задачи и уравнение движения.** Рассматривается управляемое вращательное движение тела вокруг вертикали. Тело подвешено на струне, верхний конец которой неподвижно закреплен. Управление его движением относительно центра масс осуществляется с помощью двух вентиляторных двигателей, реализующих разнонаправленные управляющие моменты вокруг вертикальной оси. Информация о текущей ориентации и угловой скорости поступает соответственно с фотодиодов и оптоволоконного датчика угловой скорости.

Задачи, решаемые системой управления ориентацией, – торможение осевого вращения, поворот на заданный угол вокруг вертикали, а также выполнение заданного углового движения вокруг нее, которое может задаваться как программное либо зависеть от текущей ориентации тела.

Тело подвержено линейному по углу поворота моменту от упругости струны и линейному по угловой скорости моменту вязкого трения от сопротивления атмосферы.

Считается, что вентиляторный двигатель мгновенно набирает номинальные обороты. Одновременно может работать только один двигатель. Влияние работающего двигателя на движение центра масс тела не учитывается и не рассматривается. Атмосфера считается однородной и неподвижной.

Получим выражение для управляющего момента, который создается двигателями. Сила, действующая на аппарат со стороны одного двигателя, $F = S\Delta p$, где $S$ – площадь диска вентилятора, $\Delta p$ – разность давлений воздуха до и после прохождения вентилятора. Используя уравнение Бернулли для обоих состояний

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2, \;\; p_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_e^2,$$

можно найти эту разность давлений. Здесь $p_1$, $p_2$ – соответственно давления воздуха до и после прохождения вентилятора; $p_0$ – статическое давление, $V$ – скорость воздуха до входа в вентилятор; $V_e$ – скорость воздуха после выхода из вентилятора; $\rho$ – плотность воздуха. Тогда управляющий момент $M$ определяется выражением

$$M = \frac{1}{2} RS\rho(V_e^2 - V^2),$$

где $R$ – расстояние от оси вращения тела вокруг вертикали до вентилятора. Считаем, что размер его значительно меньше $R$. Уравнения, описывающие осевое вращение тела, имеют вид

$$J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm\frac{1}{2} RS\rho(V_e^2 - V^2), \;\; \dot{\alpha} = \omega. \quad (1.1)$$

Здесь $J$ – момент инерции тела относительно оси вращения; $\delta$ − коэффициент вязкого трения тела о воздух; $\sigma$ − коэффициент упругости струны. Точкой обозначена операция дифференцирования по времени $t$. Знак “+” или “–” выбирается в зависимости от того, положительный или отрицательный момент создается двигателями.

В силу предположения о неподвижности атмосферы $V = |\omega R|$, поэтому первое уравнение системы (1.1) можно записать так

$$\dot{\omega} + \frac{\delta}{J}\omega \pm \frac{1}{2}\frac{\rho S R^3}{J}\omega^2 + \frac{\sigma}{J}\alpha = \pm\frac{1}{2}\frac{\rho S R V_e^2}{J}. \quad (1.2)$$

Перейдем к безразмерным угловой скорости $\Omega$ и времени $\tau$ по формулам $\omega = {V_e}/{R}\,\Omega$, $t = {R}/{V_e}\,\tau$ и введем безразмерные параметры

$$k = \pm\frac{1}{2}\frac{\rho S R^3}{J}, \;\; \varepsilon_1 = \frac{\delta}{J}\frac{R}{V_e}, \;\; \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{J}\frac{R^2}{V_e^2}.$$

Тогда уравнение (1.2) принимает вид

$$\Omega' + \varepsilon_1\Omega + k\Omega^2 + \varepsilon_2\alpha = k. \quad (1.3)$$

Перейдем к решению уравнения (1.3) в частных случаях.

**2. Частные случаи осевого вращения.** Будем считать, что

$$|k| >> \varepsilon_1, \; |k| >> \varepsilon_2, \quad (2.1)$$

т.е. в присутствии управления пренебрегаем моментом вязкого трения тела о воздух и моментом от скручивания струны. В этом случае уравнение (1.3) принимает вид

$$\Omega' = k - k\Omega^2. \quad (2.2)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$\Omega = \frac{\tilde{C}\exp(2k\tau) - 1}{\tilde{C}\exp(2k\tau) + 1}.$$

Переходя обратно к размерным величинам и переменным, имеем

$$\omega = \frac{V_e}{R}\frac{C\exp\left(2k\frac{V_e}{R}t\right) - 1}{C\exp\left(2k\frac{V_e}{R}t\right) + 1}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$C = \frac{V_e + \omega_0 R}{V_e - \omega_0 R}.$$

Заметим, что если плотность атмосферы зависит от времени (а это может иметь место при исследовании динамики тела, закрепленного на меняющем высоту полета воздушном шаре [6]), то плотность зависит от высоты и в конечном счете от времени, т.е. $k(t) = \pm \frac{SR^3 \rho(t)}{2J}$. Тогда решение уравнения (2.2) можно записать так:

$$\omega = \frac{V_e}{R} \frac{C \exp\left\{ \pm \frac{SR^2 V_e}{J} \int_0^t \rho(t') dt' \right\} - 1}{C \exp\left\{ \pm \frac{SR^2 V_e}{J} \int_0^t \rho(t') dt' \right\} + 1}.$$

Если ввести обозначения $A = \frac{V_e}{R}$, $B = k \frac{V_e}{R}$, то выражение (2.3) запишем как

$$\omega = A \frac{C \exp(2Bt) - 1}{C \exp(2Bt) + 1}. \quad (2.4)$$

Перейдем к другому частному случаю – отсутствию управляющего воздействия от вентиляторного двигателя. Это предположение отвечает условию $k = 0$ в уравнении (1.3). Тогда его решение в виде выражений для угловой скорости и угла поворота тела при свободных затухающих колебаниях имеет следующий вид:

$$\alpha = \alpha_0 \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\tau)\cos(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\tau) + \frac{\Omega_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}\alpha_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\tau)\sin(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\tau),$$

$$\Omega = -\frac{\alpha_0 \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\Omega_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\tau)\sin(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\tau) + \Omega_0 \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\tau)\sin(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\tau).$$

При переходе к размерной скорости получим

$$\omega = -\frac{\alpha_0 \frac{V_e}{R}\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\omega_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{V_e}{R}t)\sin(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\frac{V_e}{R}t) +$$

$$+\omega_0 \exp(-\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{V_e}{R}t)\sin(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}\frac{V_e}{R}t). \quad (2.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\theta = \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \frac{V_e}{R}, \; \xi = \varepsilon_1 \frac{V_e}{R}.$$

Обратный переход осуществляется по формулам

$$\varepsilon_1 = \xi \frac{R}{V_e}, \; \varepsilon_2 = \frac{R^2}{V_e^2}\left(\theta^2 + \frac{\xi^2}{4}\right).$$

В новых обозначениях (2.5) принимает вид

$$\omega = -\frac{\left(\theta^2 + \frac{\xi^2}{4}\right)\alpha_0 + \frac{\xi}{2}\omega_0}{\theta} \exp\left(-\frac{\xi}{2}t\right)\sin(\theta t) + \omega_0 \exp\left(-\frac{\xi}{2}t\right)\sin(\theta t). \quad (2.6)$$

Это выражение дает связь между угловой скоростью и параметрами затухающих колебаний, которые можно определить, например, методом наименьших квадратов, обрабатывая результаты измерений.

**3. Управление угловым движением тела.** Интегрируя выражение (2.4) и считая $\omega = \dot{\alpha}$,

находим

$$\alpha = -At + \frac{A}{B}\ln\frac{1 + C\exp(2Bt)}{1 + C} + \alpha_0. \quad (3.1)$$

Выразим из (2.4) время $t$ и подставим его в (3.1). Получим

$$\alpha = \frac{A}{2B}\ln\frac{A^2 - \omega_0^2}{A^2 - \omega^2} + \alpha_0. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) дает два семейства кривых на фазовой плоскости $(\alpha, \omega)$: для положительного вращения ($k > 0$, а следовательно, и $B > 0$) и для отрицательного ($k < 0$, $B < 0$).

*Задача поворота на заданный угол и (или) торможения* – это переход из одной точки фазовой плоскости в другую. Это значит, что сначала работает один двигатель, а когда достигается определенное начальными условиями и точкой на фазовой плоскости значение угловой скорости, происходит переключение, выключается первый двигатель и включается второй. Он отключается при достижении нулевой скорости.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда двигатели не идентичны и величины параметров $A$ и $B$ различны для каждого из двигателей. Введем обозначения для двигателя, создающего положительный момент, – $A_1 > 0$, $B_1 > 0$, а для двигателя, создающего отрицательный момент, $-A_2 < 0$, $B_2 < 0$. Выражение для кривой переключения будет иметь вид

$$f(\alpha,\omega)=\begin{cases}\alpha-\dfrac{A_2}{2B_2}\ln\dfrac{A_2^2-\omega^2}{A_2^2},\ \alpha\le 0,\\[2ex] \alpha-\dfrac{A_1}{2B_1}\ln\dfrac{A_1^2-\omega^2}{A_1^2},\alpha>0.\end{cases}\qquad(3.3)$$

Обе ветви получаются подстановкой в выражение (3.2) $\omega=0$ и $\alpha=0$ при разных значениях параметров $A$ и $B$.

Алгоритм переключения работает так.

1. Определяется начальное фазовое состояние $(\alpha_0, \omega_0)$, при этом выделяется ветвь кривой переключения

$$\alpha_0 \le 0 \Rightarrow f=\alpha-\frac{A_2}{2B_2}\ln\frac{A_2^2-\omega^2}{A_2^2},$$

$$\alpha_0 > 0 \Rightarrow f=\alpha-\frac{A_1}{2B_1}\ln\frac{A_1^2-\omega^2}{A_1^2}.$$

Если же задана величина поворота $\Delta\alpha$, то

$$\Delta\alpha \ge 0 \Rightarrow f=\alpha-\frac{A_2}{2B_2}\ln\frac{A_2^2-\omega^2}{A_2^2},$$

$$\Delta\alpha < 0 \Rightarrow f=\alpha-\frac{A_1}{2B_1}\ln\frac{A_1^2-\omega^2}{A_1^2}.$$

2. Вычисляется $f(\alpha_0, \omega_0)$. Если $f(\alpha_0, \omega_0)>0$, то работает двигатель с $A_2, B_2$, если $f(\alpha_0, \omega_0)<0$, то работает двигатель с $A_1, B_1$.

3. Измеряются $(\alpha, \omega)$ и определяется знак выражения $\Delta f=|f(\mathrm{a}, \mathrm{w})|-f_0$; здесь $f_0$ – допустимое значение отключения от расчетной кривой. При изменении знака $\Delta f$ производится переключение двигателей.

4. Осуществляется движение вдоль кривой переключения. При этом проводится проверка $|\omega|<\omega_1$ ($\omega_1$ – точность определения угловой скорости). Если достигается малое значение угловой скорости, то проводится проверка $|f(\alpha, \omega)|<\alpha_1$ ($\alpha_1$ – точность по углу). Если и это условие выполняется, то это значит, что система пришла в нужное положение, и цикл управления заканчивается; если нет, то повторяются пп. 1– 4.

Рассмотрим теперь *задачу выхода на заданную фазовую траекторию углового движения*. Пусть зависимость угла и угловой скорости от времени определяются выражениями

$$\mathrm{a}_{\text{пр}}=\alpha_{\text{пр}}(t),\ \omega_{\text{пр}}=\omega_{\text{пр}}(t)=\dot{\alpha}_{\text{пр}}(t).$$

Система управления должна осуществлять выход на эту программную траекторию и обеспечивать его асимптотическую устойчивость. Будем строить управление с помощью функции Ляпунова, выбранной в следующем виде:

$$\upsilon=\frac{1}{2}\omega_{\text{отн}}^2+\frac{1}{2}k_\gamma\alpha_{\text{отн}}^2,$$

где $\alpha_{\text{отн}},\omega_{\text{отн}}$ – относительные угол и угловая скорость, равные разнице текущих значений с программными.

Воспользовавшись соотношениями $\omega=\omega_{\text{отн}}+\omega_{\text{пр}}$ и $\alpha=\alpha_{\text{отн}}+\alpha_{\text{пр}}$, уравнение движения (2.1) можно переписать так:

$$J(\dot{\omega}_{\text{отн}}+\dot{\omega}_{\text{пр}})+\delta(\omega_{\text{отн}}+\omega_{\text{пр}})+s(\alpha_{\text{отн}}+\alpha_{\text{пр}})=Jk(A^2-V^2).$$

Считаем, что можно управлять скоростью вращения вентиляторов, т.е. изменять $V_e$, а следовательно, параметр $A$. Кроме того, также можно переключать двигатели, т.е. осуществлять выбор между $k>0$ и $k<0$. Тогда с учетом уравнений движения $\dot{\upsilon}$ будет иметь вид

$$\dot{\upsilon}=-\delta\omega_{\text{отн}}^2+\omega_{\text{отн}}\left(Jk(A^2-\omega^2)-\sigma\alpha-\delta\omega_{\text{пр}}-J\dot{\omega}_{\text{пр}}+k_\gamma\alpha_{\text{отн}}\right).$$

Для асимптотической устойчивости движения $\omega_{\text{отн}}=0, \alpha_{\text{отн}}=0$ потребуем (теорема Барбашина – Красовского [1]) выполнения условия

$$k(A^2-\omega^2)-\sigma\alpha-\delta\omega_{\text{пр}}-J\dot{\omega}_{\text{пр}}+k_\gamma\alpha_{\text{отн}}=-k_\omega\omega_{\text{отн}},$$

где $k_\omega>0$. Введем обозначение

$$Q=\sigma\alpha+\delta\omega_{\text{пр}}+J\dot{\omega}_{\text{пр}}-k_\gamma\alpha_{\text{отн}}-k_\omega\omega_{\text{отн}}$$

и выразим из условия $k(A^2-\omega^2)=Q$

$$A=\sqrt{\frac{Q}{Jk}+\omega^2},$$

$$\text{где}\begin{cases}k>0,\text{если }\dfrac{Q}{J|k|}+\omega^2\ge 0,\\[2ex] k<0,\text{если }\dfrac{Q}{J|k|}+\omega^2<0.\end{cases}\qquad(3.5)$$

Это и есть условие переключения, так как $A$ должно быть вещественным.

Подставив (3.5) в (3.4), получим

$$J\dot{\omega}_{\text{отн}} + (\delta + k_{\omega})\omega_{\text{отн}} + k_{\gamma}\alpha_{\text{отн}} = 0. \quad (3.6)$$

На практике, как правило, $A \le A_{\max}$, поэтому возникает ограничение на возможные траектории. Рассмотрим ситуацию, когда задача выхода на траекторию уже решена, т.е. $\omega_{\text{отн}} = 0$ и $\alpha_{\text{отн}} = 0$. В этом случае получаем ограничение на возможные траектории

$$\frac{\sigma\alpha_{\text{пр}} + \delta\omega_{\text{пр}} + J\dot{\omega}_{\text{пр}}}{Jk} + \omega_{\text{пр}}{}^2 \le A_{\max}^2. \quad (3.7)$$

Параметры $k_{\omega}$ и $k_{\gamma}$ выберем таким образом, чтобы максимизировать степень устойчивости [5] корней характеристического полинома уравнения (3.6)

$$J\lambda^2 + (\delta + k_{\omega})\lambda + k_{\gamma}\lambda = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\delta + k_{\omega}) \pm \sqrt{(\delta + k_{\omega})^2 - 4Jk_{\gamma}}}{2J}.$$

Максимальная степень устойчивости будет достигаться в случае, когда подкоренное выражение будет равно нулю:

$$(\delta + k_{\omega})^2 - 4Jk_{\gamma} = 0,$$

т.е. $k_{\omega} = \sqrt{4Jk_{\gamma}} - \delta$. В противном случае один из корней будет ближе к мнимой оси, и уже он будет определять степень устойчивости. Таким образом, остается один независимый параметр управления $k_{\gamma}$. Его нужно выбирать исходя из ограничений, наложенных на управляющий момент, например, в виде неравенства (3.7).

**Заключение.** В работе представлена относительно простая, но в то же время, судя по результатам проведенного исследования, эффективная система управления угловым движением вокруг вертикали тела, подвешенного на струне, которая использует вентиляторные двигатели в качестве исполнительных органов.

Предложены алгоритм управления и его программная реализация, разработана методика полунатурных испытаний, которая успешно апробирована в лабораторных условиях.

## Список литературы


1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. *Биндель Д., Зараменских И. Е., Иванов Д. С. и др.* Лабораторный стенд для верификации алгоритмов управления группировкой спутников // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. Т. 48. № 5. С. 109–117.
3. *Овчинников М. Ю., Иванов Д. С.* Использование одноосного гироскопа для определения ориентации макета в лабораторных условиях. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008. 32 с.
4. *Овчинников М. Ю., Ткачёв С. С.* Компьютерное и полунатурное моделирование динамики управляемых систем. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008. 28 с.
5. *Цыпкин Я. З., Бромберг П. В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 12. С. 1163–1168.
6. *Barabash V., Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu. et al.* Balloon payload attitude control system: preprint of KIAM RAS, 2010, no. 15, 26 p.
7. *Esper J.* The Rocket Balloon (Rocketball): Applications to Science, and Education. *Digest of the 7th Inter. Symp. of IAA "Small Satellites for Earth Observation",* May 4–8. Berlin, Germany, Walter De Gruyter Publ., 2009, paper IAA-B7-1301, pp. 517–520.
8. Leading global provider of advanced space services. URL: http://www.ssc.se/?id=7114.
9. *Quadrelli M. B., Jonathan M., Cameron V. K.* Multibody dynamics of parachute and balloon flight systems for planetary exploration. J. of Guidance, Control and Dynamics, 2004, V. 27, no. 4, July – August, pp. 564–571.
10. *White J. E., Ettert J. R.* Linear-Quadratic-Regulator Pointing Control System for a High-Altitude Balloon Payload. *J. of Guidance, Control and Dynamics,* 1990, vol. 13, no. 4, July – August, pp. 615–623.


## References


1. Barbashin E. A. (1967) Introduction to the theory of stability. Moscow, Nauka Publ.
2. Bindel D., Zaramenskikh I. E., Ivanov D. S. et al. (2009) Laboratory bench for verification of control algorithms for satellite systems, *Izv. Russian Academy of Sciences,* vol. 48, no. 5, pp. 109–117.
3. Ovchinnikov M. Yu., Ivanov D. S. (2008) The Use of a uniaxial gyroscope to determine the orientation of the layout in the la-

boratory. Moscow, IPM im. M. V. Keldysh of Russian Academy of Sciences Publ., 32 p.
4. Ovchinnikov M. Yu., Tkachev S. S. (2008) Computer and-loop simulation of dynamics of controlled systems. Moscow, IPM im. M. V. Keldysh of Russian Academy of Sciences Publ., 28 p.
5. Tsypkin Y. Z., Bromberg P. V. (1945) On the degree of stability of linear systems, *Izv. USSR Academy of sciences rel.,* no. 12, pp. 1163–1168.
6. Barabash V., Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu. et al. (2010) Balloon payload attitude control system: preprint of KIAM RAS, no. 15, 26 p.
7. Esper J. (2009) The Rocket Balloon (Rocketball): Applications to Science and Education. *Digest of the 7th Inter. Symp. of IAA "Small Satellites for Earth Observation",* 4–8 May. Berlin, Germany, Walter De Gruyter Publ., paper IAA-B7-1301, pp. 517–520.
8. Leading global provider of advanced space services. URL: http://www.ssc.se/?id=7114.
9. Quadrelli M. B., Jonathan M., Cameron V. K. (2004) Multibody dynamics of parachute and balloon flight systems for planetary exploration. *J. of Guidance, Control and Dynamics,* vol. 27, no. 4, July – August, pp. 564–571.
10. White J. E., Ettert J. R. (1990) Linear-Quadratic-Regulator Pointing Control System for a High Altitude Balloon Payload. *J. of Guidance, Control and Dynamics,* vol. 13, no. 4, July – August, pp. 615–623.